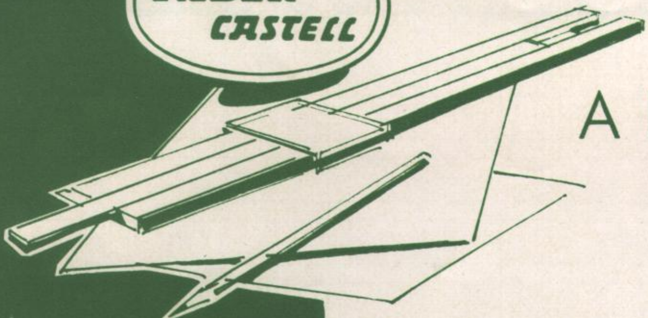
FABER-CASTELL



ANLEITUNG

zum Gebrauch

der Komplex-Rechenplatte

CASTELL Nr. 989

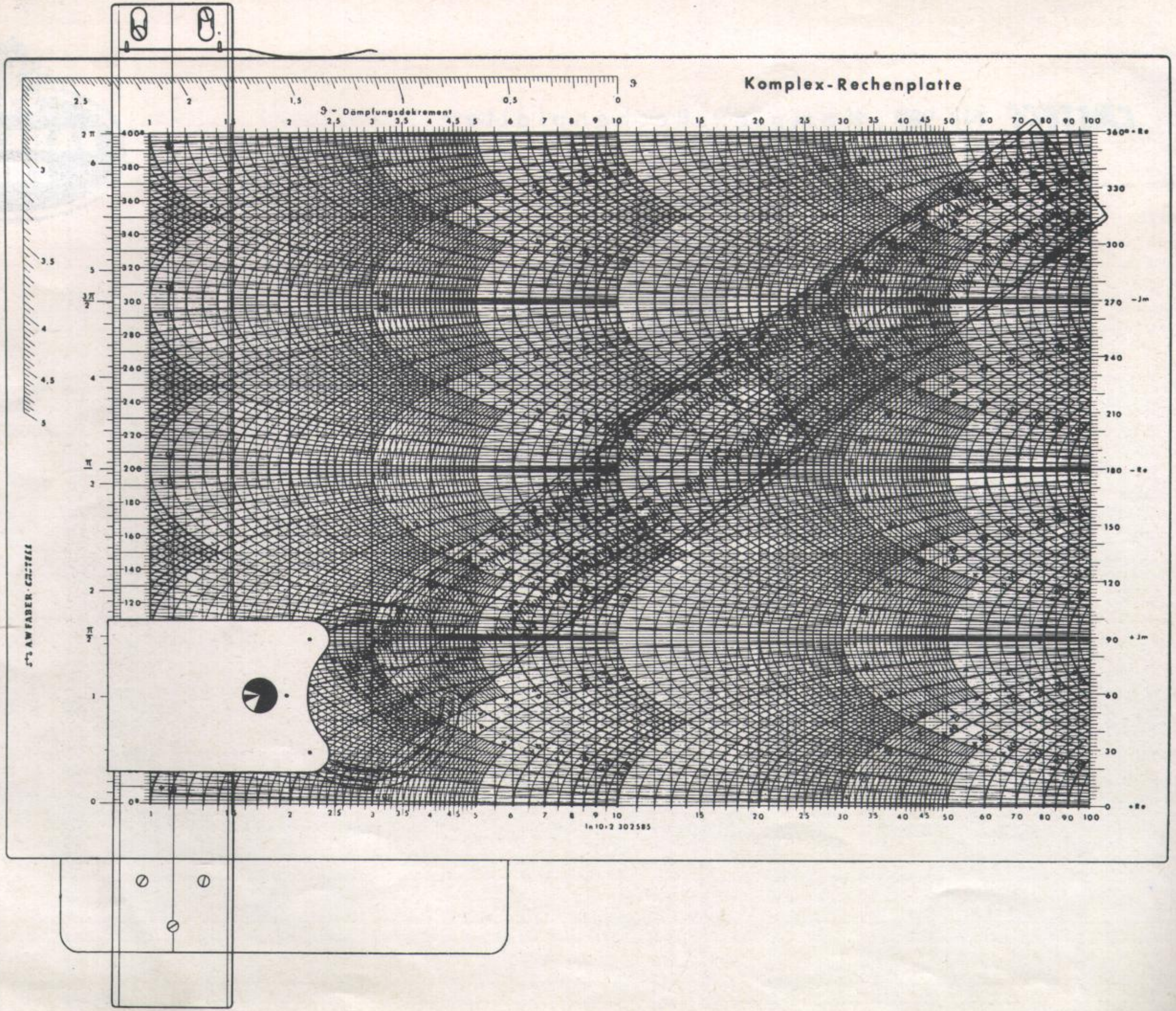
A. W. FABER-CASTELL · STEIN BEI NÜRNBERG

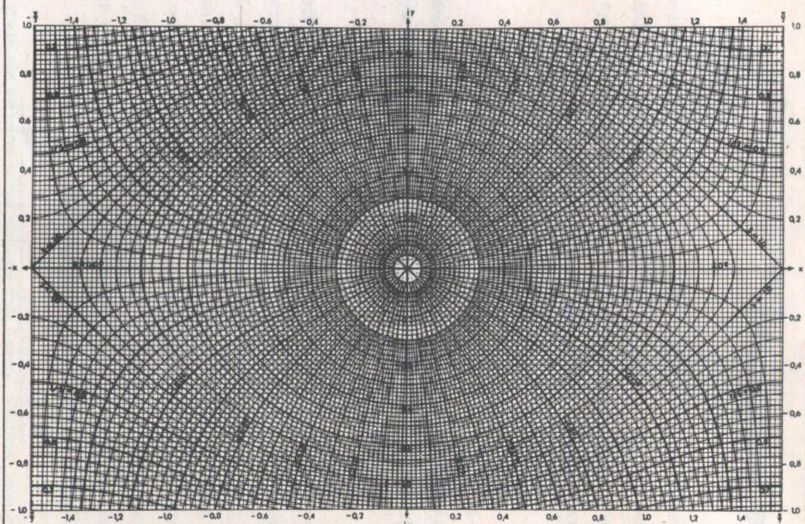
CASTELL Nr. 989 „Komplex-Rechenplatte"

FABER-CASTELL

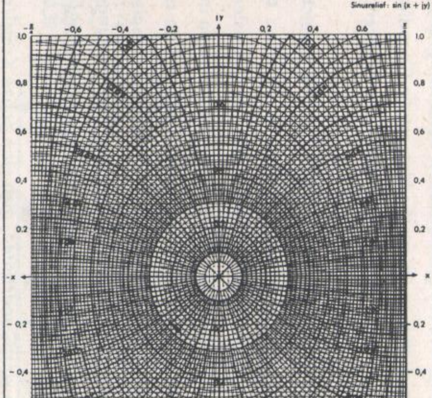
CASTELL Nr. 989 „Komplex-Rechenplatte"

FABER-CASTELL


Komplex-Rechenplatte
ϑ - Dämpfungsdekrement
A.W. FABER-CASTELL
ln 10 = 2,302585



Sinusrelief: $\sin(x+jy) = s\,\underline{/\sigma^{0}}$



Tangensrelief: $\mathrm{tg}\,(x+jy) = t\,\underline{/\tau^{0}}$

$$\sin z = \sin(x+jy) = s\,\underline{/\sigma^{0}} = s\cdot e^{j\sigma^{0}}$$

Für $x \gtrless \pm 2k\pi$ gilt: $\sin(x+jy) = \sin(x \mp 2k\pi + jy) = s\,\underline{/\sigma^{0}}$

Für $\pm\frac{\pi}{2} \lesseqgtr \pm x \lesseqgtr \pm\pi$ gilt: $\sin(x+jy) = \sin[\pm\pi - (x+jy)] = s\,\underline{/-\sigma^{0}}$

$\mathrm{arc}\sin s\,\underline{/\sigma^{0}} = \pm\pi - \mathrm{arc}\sin s\,\underline{/\sigma^{0}} = \pm\pi - (x+jy)$

$\cos(u+jv) = \cos(-u-jv) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+|u|+j|v|\right)$

$\cos(-u+jv) = \cos(u-jv) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-|u|+j|v|\right)$

$\mathrm{arc}\cos s\,\underline{/\sigma^{0}} = \left(\frac{\pi}{2}-x\right) - jy$

$\mathfrak{Sin}(u+jv) = j\sin(\lvert v\rvert - j\lvert u\rvert)$	$\mathfrak{ArSin}\, s\,\underline{/(100-\sigma)^{0}} = y+jx$
$\mathfrak{Sin}(-u+jv) = j\sin(\lvert v\rvert + j\lvert u\rvert)$	$\mathfrak{ArSin}\, s\,\underline{/(100+\sigma)^{0}} = -y+jx$
$\mathfrak{Sin}(-u-jv) = j\sin(-\lvert v\rvert + j\lvert u\rvert)$	$\mathfrak{ArSin}\, s\,\underline{/(-100-\sigma)^{0}} = -y-jx$
$\mathfrak{Sin}(u-jv) = j\sin(-\lvert v\rvert - j\lvert u\rvert)$	$\mathfrak{ArSin}\, s\,\underline{/(-100+\sigma)^{0}} = y-jx$

$\mathfrak{Cof}(u+jv) = \mathfrak{Cof}(-u-jv) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+|v|-j|u|\right)$

$\mathfrak{Cof}(-u+jv) = \mathfrak{Cof}(u-jv) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-|v|-j|u|\right)$

$\mathfrak{ArCof}\, s\,\underline{/\sigma^{0}} = y + j\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$$\mathrm{tg}\, z = \mathrm{tg}\,(x+jy) = t\,\underline{/\tau^{0}} = t\cdot e^{j\tau^{0}}$$

Für $x \gtrless \pm k\pi$ gilt: $\mathrm{tg}\,(x+jy) = \mathrm{tg}\,(x \mp k\pi + jy) = t\,\underline{/\tau^{0}}$

Für $\pm\frac{\pi}{4} \lesseqgtr \pm x \lesseqgtr \pm\frac{\pi}{2}$ gilt: $\mathrm{tg}\,(x+jy) = 1 : \mathrm{tg}\,[\pm\frac{\pi}{2} - (x+jy)] = 1 : (t\,\underline{/-\tau^{0}}) = \;\underline{/\tau^{0}}$

$\mathrm{arc\,tg}\, t\,\underline{/\tau^{0}} = \pm\frac{\pi}{2} - \mathrm{arc\,tg}\,[1 : (t\,\underline{/\tau^{0}})] = \pm\frac{\pi}{2} - (x+jy)$

$\mathrm{ctg}\,(u+jv) = 1 : \mathrm{tg}\,(u+jv) = \frac{1}{t}\,\underline{/-\tau^{0}}$	$\mathrm{arc\,ctg}\,t\,\underline{/\tau^{0}} = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{t}\,\underline{/-\tau^{0}}$
$\mathfrak{Tg}(u+jv) = j\,\mathrm{tg}\,(\lvert v\rvert - j\lvert u\rvert)$	$\mathfrak{ArTg}\, t\,\underline{/(100-\tau)^{0}} = y+jx$
$\mathfrak{Tg}(-u+jv) = j\,\mathrm{tg}\,(\lvert v\rvert + j\lvert u\rvert)$	$\mathfrak{ArTg}\, t\,\underline{/(100+\tau)^{0}} = -y+jx$
$\mathfrak{Tg}(-u-jv) = j\,\mathrm{tg}\,(-\lvert v\rvert + j\lvert u\rvert)$	$\mathfrak{ArTg}\, t\,\underline{/(-100-\tau)^{0}} = -y-jx$
$\mathfrak{Tg}(u-jv) = j\,\mathrm{tg}\,(-\lvert v\rvert - j\lvert u\rvert)$	$\mathfrak{ArTg}\, t\,\underline{/(-100+\tau)^{0}} = y-jx$
$\mathfrak{Ctg}(u+jv) = 1 : \mathfrak{Tg}(u+jv) = \frac{1}{jt}\,\underline{/-\tau^{0}}$	$\mathfrak{ArCtg}\, t\,\underline{/\tau^{0}} = \mathfrak{ArTg}\,\frac{1}{t}\,\underline{/-\tau^{0}}$

Die Komplex-Rechenplatte

Die Darstellung komplexer Zahlen als Punkte im Netz der Gauß'schen Zahlenebene hat ein weites Anwendungsgebiet in der reinen Mathematik wie auch in den technischen Wissenschaften gefunden. Besonders in der Elektrotechnik ist das Rechnen mit komplexen Zahlen bei der Vektordarstellung von Wechselstromgrößen zu einem unbedingten Erfordernis geworden. Die komplexe Zahlenebene ist jedoch nur ein reines Darstellungsmittel und zum direkten praktischen Rechnen kaum geeignet. Durch die Anwendung der Beziehung

$$\ln(a_1 + j a_2) = \ln(|a|\, e^{j\varphi}) = \ln|a| + j\varphi$$

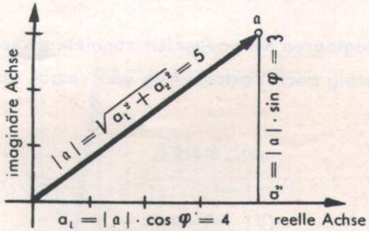
läßt sich eine günstige Darstellung komplexer Zahlen in einem halblogarithmischen Koordinatennetz erreichen. Mit dieser Transformation der komplexen Zahlenebene in das halblogarithmische Netz ist die Grundlage zu einem praktischen Rechenhilfsmittel geschaffen, welches gleichzeitig den Vorzug hat, die übersichtliche Darstellung völlig zu wahren.

Dieses Rechenhilfsmittel, das kurz mit KOMPLEX-RECHENPLATTE bezeichnet wird, trägt auf einer Grundplatte das oben erwähnte halblogarithmische Koordinatennetz in roter Färbung, wobei gemäß $\ln|a| + j\varphi$ der Winkel (Versor) als Ordinate linear und der Absolutwert (Vektorbetrag) als Abszisse logarithmisch aufgetragen ist. In diesem Grundraster sind die transformierten Netzlinien der Gauß'schen Zahlenebene als Kurvenscharen eingezeichnet und zwar für die reellen Komponenten in schwarz und für die imaginären Komponenten in blau. Die ganze Rechenfläche umfaßt alle vier Quadranten, wobei der erste Quadrant im unteren und der vierte Quadrant im oberen Bereich der Fläche liegt. Durch eine besondere winkelverstellbare und parallelverschiebbare Linealeinrichtung können auf der Komplex-Rechenplatte in ähnlicher Weise wie beim normalen Rechenstab Multiplikationen, Divisionen, Potenzierungen und Radizierungen vorgenommen werden. Infolge der einfachen Zerlegung in die Normalkomponenten lassen sich auch Additionen und Subtraktionen mühelos durchführen.

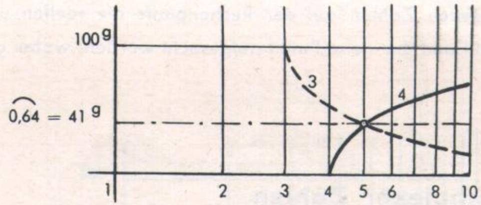
Da die Komplex-Rechenplatte alle vier Quadranten, also eine ganze Kreisfrequenz, enthält, lassen sich sowohl harmonische als auch exponentiell gedämpfte Schwingungen durch Gerade darstellen und rechnerisch erfassen.

1. Darstellung komplexer Zahlen

Gauß'sche Zahlenebene



Komplex-Rechenplatte

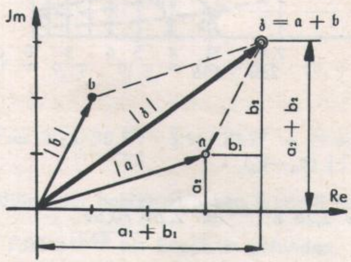


$$a = (a_1 + j\,a_2) = (4 + j\,3) = 5\,e^{j0{,}64} = 5\,\underline{/41^g}$$

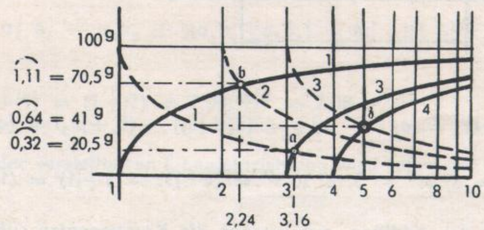
Auf der Komplex-Rechenplatte ist für komplexe Zahlen der Zusammenhang zwischen Absolutbetrag (Vektorbetrag) und Winkel (Versor) einerseits und Realteil und Imaginärteil andererseits ablesbar.

2. Addition komplexer Zahlen

Gauß'sche Zahlenebene



Komplex-Rechenplatte



a = 3+j1
b = 1+j2

a+b = 4+j3

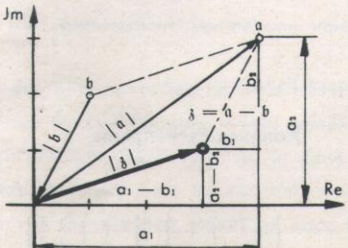
$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = |\mathfrak{a}|\ e^{j\varphi} + |\mathfrak{b}|\ e^{j\psi} = a/\underline{\varphi} + b/\underline{\psi} = (a_1+ja_2) + (b_1+jb_2) = (a_1+b_1) + j(a_2+b_2)$$

$$3{,}16\ e^{j0{,}32}+2{,}24\ e^{j1{,}11} = 3{,}16/\underline{20{,}5^g}+2{,}24/\underline{70{,}5^g} = (3\times j1)+(1+j2) = (4+j3) = 5\ e^{j0{,}64} = 5\ /\underline{41^g}$$

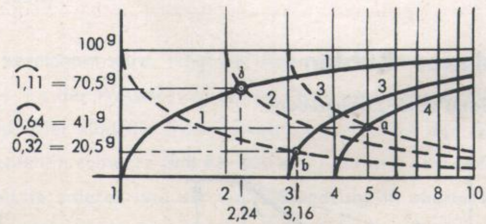
Da für jede dieser komplexen Zahlen auf der Rechenplatte die reellen und imaginären Komponenten abgelesen werden können, brauchen diese nur zusammengezählt und der neue Punkt aufgesucht werden, wobei gleichzeitig auch Vektorbetrag und Versor abgelesen werden kann.

3. Subtraktion komplexer Zahlen

Gauß'sche Zahlenebene



Komplex-Rechenplatte



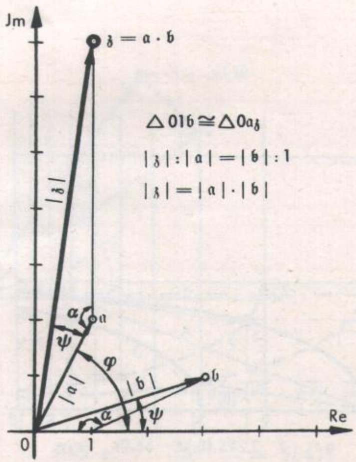
$$\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = |\mathfrak{a}|\ e^{j\varphi} - |\mathfrak{b}| e^{j\psi} = a/\underline{\varphi} - b/\underline{\psi} = (a_1+ja_2) - (b_1+jb_2) = (a_1-b_1) + j\ (a_2-b_2)$$

$$5\ e^{j0{,}64} - 3{,}16\ e^{j0{,}32} = 5/\underline{41^g} - 3{,}16/\underline{20{,}5^g} = (4+j3) - (3+j1) = (1+j2) = 2{,}24\ e^{j1{,}11} = 2{,}24/\underline{70{,}5^g}$$

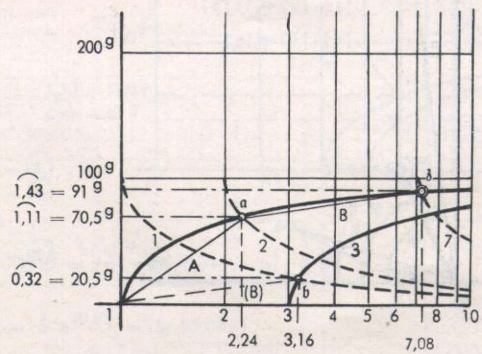
Der Vorgang ist analog der Addition, nur werden die Komponenten subtrahiert.

4. Multiplikation komplexer Zahlen

Gauß'sche Zahlenebene



Komplex-Rechenplatte



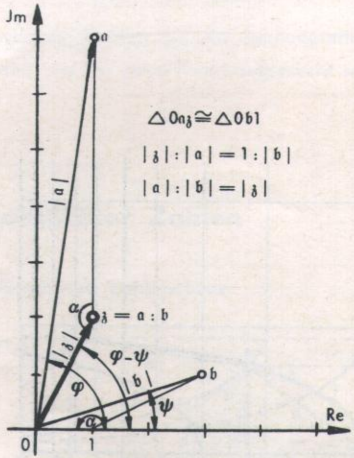
$$a \cdot b = |a|\, e^{j\varphi} \cdot |b|\, e^{j\psi} = \underline{a/\varphi} \cdot \underline{b/\psi} = (a_1+ja_2)\cdot(b_1+jb_2) = a_1 b_1 - a_2 b_2 + j(a_1 b_2 + a_2 b_1) = |a| \cdot |b|\, e^{j(\varphi+\psi)} = ab/\underline{\varphi+\psi}$$

$$2{,}24\, e^{\underline{j1{,}11}} \cdot 3{,}16\, e^{j0{,}32} = 2{,}24\underline{/70{,}5^g} \cdot 3{,}16\underline{/20{,}5^g} = (1+j2)\cdot(3+j1) = (1+j7) = 7{,}08\underline{/91^g} = 7{,}08\, e^{j1{,}43}$$

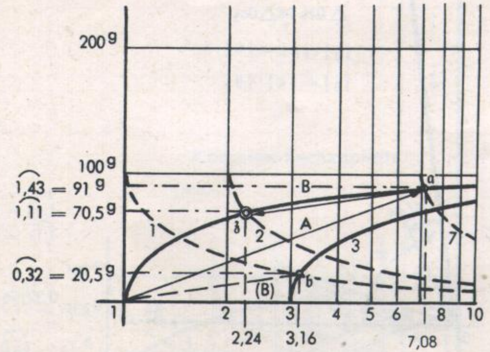
Durch geometrische Addition der beiden Strecken A und B mit Hilfe der verstellbaren Linealeinrichtung wird sofort der Punkt $\mathfrak{z}$ mit den Werten $7{,}08\underline{/91^g} = (1+j7) = 7{,}08\, e^{j1{,}43}$ als Ergebnis gefunden.

5. Division komplexer Zahlen

Gauß'sche Zahlenebene



Komplex-Rechenplatte



$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = |\mathfrak{a}|\, e^{j\varphi} : |\mathfrak{b}|\, e^{j\psi} = \mathfrak{a}\underline{/\varphi} : \mathfrak{b}\underline{/\psi} = (a_1 + ja_2) : (b_1 + jb_2)$$

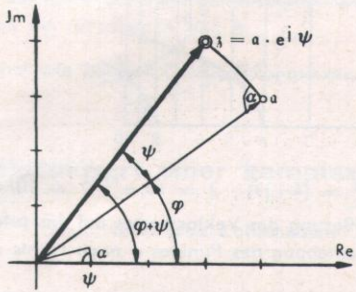
$$= \frac{(a_1 + ja_2)\cdot(b_1 - jb_2)}{b_1^2 + b_2^2} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{b_1^2 + b_2^2} + j\,\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1^2 + b_2^2} = \frac{|\mathfrak{a}|}{|\mathfrak{b}|}\, e^{j(\varphi - \psi)} = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\, \underline{/\varphi - \psi}$$

$$7{,}08\; e^{j1{,}43} : 3{,}16\; e^{j0{,}32} = 7{,}08\underline{/91^g} : 3{,}16\underline{/20{,}5^g} = (1 + j7) : (3 + j1) = (1 + j2) = 2{,}24\underline{/70{,}5^g} = 2{,}24\; e^{j1{,}11}$$

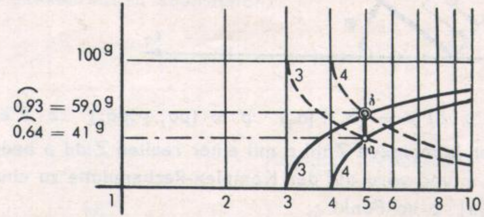
Durch geometrische Subtraktion der Strecke B von der Strecke A mit Hilfe der verstellbaren Linealeinrichtung erhält man den Punkt $\mathfrak{z}$ mit den Werten $2{,}24\underline{/70{,}5^g} = (1+j2) = 2{,}24\; e^{j1{,}11}$ als Ergebnis.

6. Multiplikation bzw. Division mit bzw. durch $e^{j\psi}$

Gauß'sche Zahlenebene



Komplex-Rechenplatte



$$\mathfrak{a} \cdot e^{j\psi} = |\mathfrak{a}|\, e^{j\varphi} \cdot e^{j\psi} = \mathfrak{a}/\underline{\varphi} \cdot 1/\underline{\psi} = |\mathfrak{a}|\, e^{j(\varphi+\psi)} = \mathfrak{a}/\underline{\varphi+\psi}$$

$$5\, e^{j0{,}64} \cdot e^{j0{,}29} = \underline{5/41^g} \cdot \underline{1/18^g} = 5\, e^{j0{,}93} = \underline{5/59{,}0^g}$$

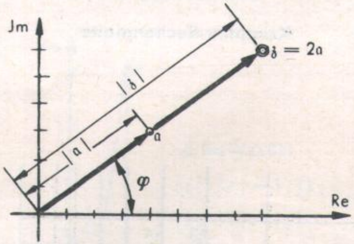
$$(4+j3) \cdot (0{,}97+j0{,}29) = (3{,}88-0{,}88) + j\,(1{,}1+2{,}9) = 3+j4$$

Die in der Gauß'schen Zahlenebene als entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn gerichtete Drehung des Vektors $\mathfrak{a}$ um den Winkel ψ gezeigte Darstellung, die einer Multiplikation mit dem Einheitsvektor $1/\underline{\psi}$ entspricht, wird auf der Komplex-Rechenplatte einfach zu einer Vertikalverschiebung des Punktes $\mathfrak{a}$ nach oben bis zur Ordinate $\varphi + \psi$ im Punkt $\mathfrak{z}$.

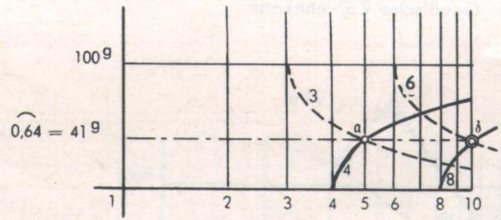
Der Division entspricht dann in der Gauß'schen Zahlenebene eine Drehung des Vektors $\mathfrak{a}$ im Uhrzeigersinn und auf der Komplex-Rechenplatte eine Vertikalverschiebung nach unten.

7. Multiplikation bzw. Division einer komplexen Zahl mit bzw. durch eine reelle Zahl

Gauß'sche Zahlenebene



Komplex-Rechenplatte



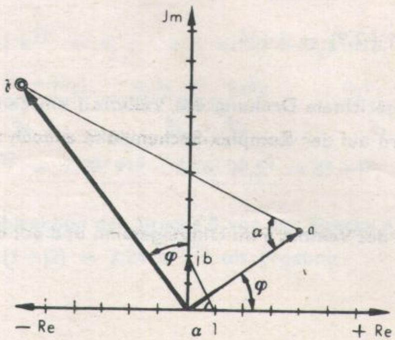
$\mathfrak{a} \cdot p = p \cdot |\mathfrak{a}|\, e^{j\varphi} = p \cdot \mathfrak{a}\underline{/\varphi} = (a_1 + ja_2) \cdot p = (pa_1 + jpa_2)$ $\quad 2 \cdot 5\, e^{j0,64} = 2 \cdot 5\underline{/41^g} = (4+j3) \cdot 2 = 10\, e^{j0,64} = 10\underline{/41^g} = (8+j6)$

Die Multiplikation einer komplexen Zahl $\mathfrak{a}$ mit einer reellen Zahl p bedeutet eine Vergrößerung des Vektorwertes auf das p-fache unter Beibehaltung des Winkels φ und wird auf der Komplex-Rechenplatte zu einer Horizontalverschiebung des Punktes $\mathfrak{a}$ nach rechts um die Strecke d zum Abszissenwert $|\mathfrak{a}| \cdot p$ im Punkt $\mathfrak{z}$.

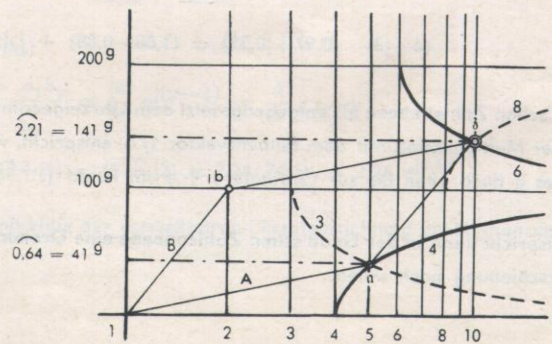
Die Division entspricht dann einer Verkleinerung des Vektorwertes auf den p-ten Teil unter Beibehaltung des Winkels φ und auf der Komplex-Rechenplatte einer Horizontalverschiebung des Punktes $\mathfrak{z}$ nach links um die Strecke p bis zum Abszissenwert $|\mathfrak{z}|/p$ im Punkt $\mathfrak{a}$.

8. Multiplikation bzw. Division einer komplexen Zahl mit bzw. durch eine imaginäre Zahl

Gauß'sche Zahlenebene



Komplex-Rechenplatte



Es gilt:

$$e^{j\pi/2} = j = 1/\underline{100^g};\quad e^{j\pi} = -1 = 1/\underline{200^g};\quad e^{-j\pi/2} = -j = 1/\underline{300^g} \text{ usw.}$$

$$\mathfrak{a}\cdot j\mathfrak{b} = |\mathfrak{a}|\, e^{j\varphi}\cdot|\mathfrak{b}|\, e^{j\pi/2} = a/\underline{\varphi}\cdot b/\underline{100^g} = (a_1+ja_2)\cdot jb = (-a_2 b + j a_1 b) = |\mathfrak{a}|\cdot \mathfrak{b}\; e^{j(\varphi+\pi/2)} = ab/\underline{\varphi+100^g}$$

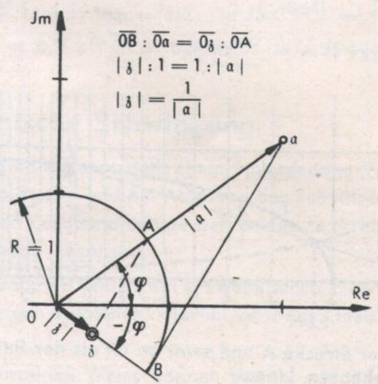
$$5\, e^{j0,64}\cdot 2\, e^{j\pi/2} = 5/\underline{41^g}\cdot 2/\underline{100^g} = (4+j3)\cdot j2 = 10\, e^{j2,21} = (-6+j8) = 10/\underline{141^g}$$

Der praktische Rechenvorgang auf der Komplex-Rechenplatte entspricht genau dem der Multiplikation komplexer Zahlen, also einer geometrischen Addition der Strecken A und B.

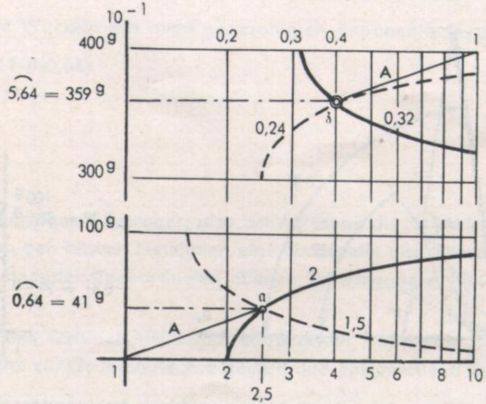
Die Division wird wie bei der Division komplexer Zahlen zu einer geometrischen Subtraktion.

9. Der Reziprokwert einer komplexen Zahl

Gauß'sche Zahlenebene



Komplex-Rechenplatte



$$\frac{1}{a} = \frac{1}{|a|\, e^{j\varphi}} = \frac{1}{a/\underline{\varphi}} = \frac{1}{a_1+ja_2} = \frac{a_1-ja_2}{a_1^2+a_2^2} = \frac{a_1}{a_1^2+a_2^2} - j\,\frac{a_2}{a_1^2+a_2^2}$$

$$\frac{1}{2{,}5\, e^{j0{,}64}} = \frac{1}{2{,}5/\underline{41^g}} = \frac{1}{2+j1{,}5} = \frac{2}{6{,}25} - j\,\frac{1{,}5}{6{,}25} = 0{,}32 - j0{,}24 = 0{,}4/\underline{-41^g} = 0{,}4/\underline{359^g} = 0{,}4\, e^{j5{,}64}$$

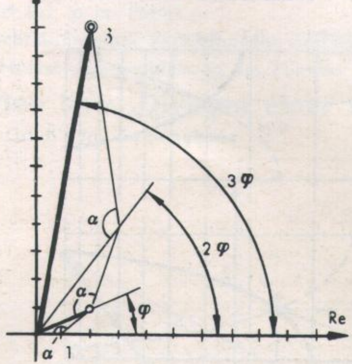
Die Bildung des Reziprokwertes einer komplexen Zahl entspricht einer Division in 1 und wird auf der Komplex-Rechenplatte auch als geometrische Subtraktion vom Punkt 1 aus durchgeführt. Man muß jedoch beachten, daß der 4. Quadrant der vorhergehenden Periode auf der Platte nicht vorhanden ist und durch den 4. Quadranten ersetzt werden muß, den man sich um eine Dekade (oder falls notwendig um zwei Dekaden) nach links verschoben zu denken hat.

10. Die Potenzierung einer komplexen Zahl

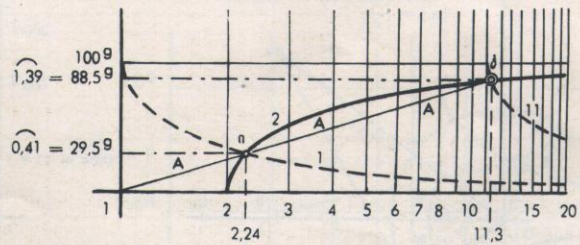
$$a^n = (|a|\, e^{j\varphi})^n = (a/\underline{\varphi})^n = (a_1+ja_2)^n = |a|^n \cdot e^{jn\varphi} = a^n/\underline{n\varphi} = z/\underline{\psi}$$

$$(2{,}24\, e^{j0{,}46})^3 = (2{,}24/\underline{29{,}5^g})^3 = (2+j1)^3 = 2+j11 = 11{,}3\, e^{j1{,}39} = 11{,}3\,/\underline{88{,}5^g}$$

Gauß'sche Zahlenebene



Komplex-Rechenplatte



Auf der Komplex-Rechenplatte erfolgt das Potenzieren durch Aneinanderreihen der Strecke A und zwar so oft als der Exponent angibt. Vorteilhaft benutzt man hierzu eine lineare Skalenteilung (z. B. ln-Skala) am schwenkbaren Lineal.

11. Radizierung einer komplexen Zahl

Die Radizierung geht als Umkehrung der Potenzierung aus der vorstehenden Abbildung hervor. Die Teilung der mit einem der Maßstäbe des schwenkbaren Lineals gemessenen Strecke A wird dabei als Nebenrechnung vorteilhaft mit einem normalen Rechenstab vorgenommen.

$$\sqrt[n]{\mathfrak{z}} = \sqrt[n]{|\mathfrak{z}| \cdot e^{j\psi}} = \sqrt[n]{z\underline{/\psi}} = \sqrt[n]{z_1 + jz_2} = \sqrt[n]{|\mathfrak{z}|} \cdot e^{j\frac{\psi}{n}} = \sqrt[n]{z}\,\underline{/\psi/n} = \mathfrak{a}\underline{/\varphi} = |\mathfrak{a}|\, e^{j\varphi} = \mathfrak{a}$$

12. Logarithmierung komplexer Zahlen

$\ln \mathfrak{a} = \ln(|\mathfrak{a}|\, e^{j\varphi}) = \ln|\mathfrak{a}| + j\varphi + j2k\pi \quad$ wobei $k = 0; \pm 1; \pm 2 \ldots$

Es gilt: $\ln j = j\,\pi/2$; $\ln -1 = j\pi$; $\ln(-j) = j\,\dfrac{3\pi}{2}$

$\ln(4+j3) = \ln(5e^{j0,64}) = 1,61 + j\,0,64 = 1,74\underline{/24,1^g} = 1,74\, e^{j0,377}$

Der natürliche Logarithmus des Absolutbetrages $\mathfrak{a}$ kann mit Hilfe der ln-Skala (lineare Teilung bis 4,6) am schwenkbaren Lineal (oben) sofort abgelesen werden.

Auf der Komplex-Rechenplatte lassen sich somit auch Potenzen und Wurzeln mit nicht ganzzahligen Exponenten ermitteln.

$(4+j3)^{1,2} = (5e^{j0,64})^{1,2} = \mathfrak{z}$; $\ln\mathfrak{z} = 1,2 \cdot \ln(5e^{j0,64}) = 1,2\,(1,61+j0,64)$

$\ln\mathfrak{z} = 1,93+j0,77$; $\mathfrak{z} = 6,9\, e^{j0.77} = 6,9\underline{/49,0^g} = 4,95+j4,81$

13. Die harmonische Schwingung

Eine Parallele zur Ordinatenachse stellt einen umlaufenden Vektor konstanten Betrages, also bei Ablesung der Schnittpunkte an den schwarzen Netzkurven eine Cosinuswelle und bei Ablesung der Schnittpunkte an den blauen Netzlinien eine Sinuswelle dar. Diese Darstellung gibt gleichzeitig ein gutes Bild der Zusammenhänge der beiden senkrecht zu einander angeordneten ebenen Schwingungen gleicher Amplitude, die sich zu einer Kreisschwingung ergänzen.

Mit Hilfe der beiden unteren Skalen am schwenkbaren Lineal, die den Ordinatenteilungen entsprechen, kann man auch vorteilhaft vor- und nacheilende Schwingungen darstellen. Hierbei wird das Lineal parallel zur Ordinatenachse gestellt und entsprechend der Vor- oder Nacheilung verschoben.

Durch Addition der einzelnen Werte können sowohl additive wie auch multiplikative Schwingungsüberlagerungen ermittelt werden.

14. Die exponentiell gedämpfte Schwingung

Eine zur Ordinatenachse geneigte Linie stellt auf der Komplex-Rechenplatte eine exponentiell gedämpfte Schwingung mit einem durch die Neigung bestimmten Dämpfungsdekrement ϑ dar. Um eine Einstellung solch einer gedämpften Schwingung auf der Komplex-Rechenplatte vornehmen zu können, wird das schwenkbare Lineal einschließlich des Führungsteiles vom Vertikallineal abgezogen und so gewendet wieder aufgeschoben, daß das Schwenklineal links vom Vertikallineal zu liegen kommt. Der feststellbare Drehpunkt liegt dann in der Nähe der Unterkante der Rechenplatte. Nun wird das Schwenklineal so eingerichtet, daß die Mittellinie desselben auf die 10 der untersten reellen Grundskala und auf das gewünschte Dämpfungsdekrement der Skala am oberen Rand der Rechenplatte zu liegen kommt. Durch Verschieben wird die Mittellinie auf den Vektoranfangswert R gebracht, so daß sich alle Zwischenwerte von 0 bis 2π und zwar sowohl als Vektorbetrag und Versor als auch als reelle und imaginäre Komponenten ablesen lassen. Will man die gedämpfte Schwingung über die erste Periode hinaus verfolgen, braucht nur der bei $2\,\pi$ erhaltene Vektorwert $r_{2\pi}$ auf die unterste Grundskala übertragen und die Mittellinie des Schwenklineals auf diesen neuen Wert eingestellt werden. Durch weitere Anwendung dieses Vorganges lassen sich die Schwingungen beliebig weit evtl. bis zur völligen Ausdämpfung ermitteln.

Für die exponentiell gedämpfte Schwingung gilt die Beziehung:

$$Y = e^{-\frac{\varphi}{2\pi}} \cdot R\,(\cos\varphi + j\sin\varphi) \quad \text{oder} \quad Y = e^{-\frac{\omega t}{2\pi}} \cdot R\left(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right)$$

Es ist dann auch: $r = e^{-\frac{\varphi}{2\pi}} \cdot R$ und $x = r \cdot \cos\varphi$ bzw. $y = r \cdot j\sin\varphi$

Anschließend ist ein Beispiel für eine exponentiell gedämpfte Schwingung mit einem Vektoranfangswert $R = 10$ und einem Dämpfungsdekrement $\vartheta = 1$ zur Erläuterung dargestellt.

Für diesen Fall wird:

Für $\varphi = 2\pi$ $\quad Y = e^{-1} \cdot 10\,(\cos 2\pi + j\sin 2\pi)$

$Y = 10/e \cdot (1 + j0) = 10/e = 3{,}68$

für $\varphi = 4\pi$ $\quad Y = e^{-2} \cdot 10\,(\cos 4\pi + j\sin 4\pi)$

$Y = 10/e^2 = 10/7{,}39 = 1{,}35$

Das Dämpfungsdekrement ist:

$$\vartheta = \ln\frac{R}{r_{2\pi}} = \ln\frac{r_{2\pi}}{r_{4\pi}} = \dots\dots = \ln\frac{10}{3{,}68} = \ln\frac{3{,}68}{1{,}35} = 1$$

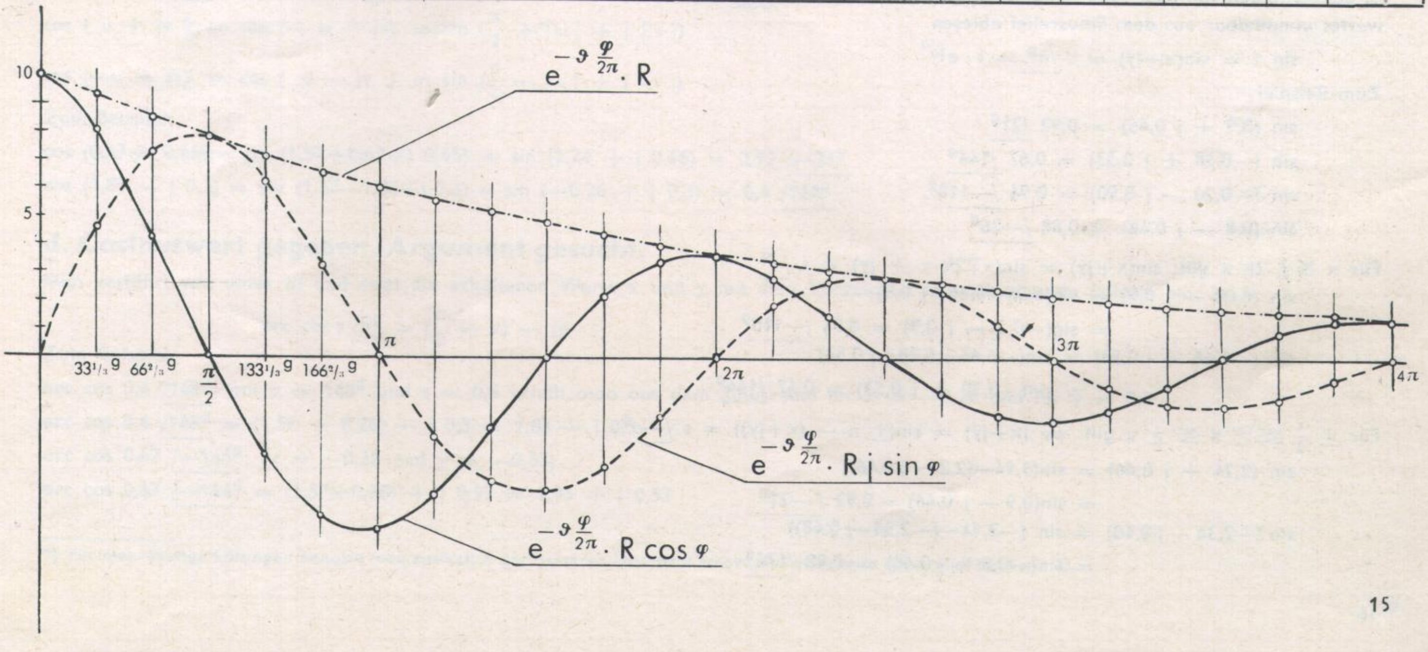
Der Funktionsverlauf ist in der umseitigen Tabelle und zeichnerischen Darstellung aufgezeigt.

Exponentiell gedämpfte Schwingung (für $\vartheta = 1$ und $R = 10$)

$Y = e^{-\vartheta \frac{\varphi}{2\pi}} R (\cos\varphi + j \sin\varphi) = e^{-1 \frac{\varphi}{2\pi}} 10 (\cos\varphi + j \sin\varphi)$; $r = e^{-\vartheta \frac{\varphi}{2\pi}} \cdot R$; $x = r \cdot \cos\varphi$; $j y = r \cdot j \sin\varphi$

Dämpfungsdekrement $\vartheta = \ln \frac{R}{r_{2\pi}} = \ln \frac{r_{2\pi}}{r_{4\pi}} \ldots\ldots = \ln \frac{10}{3,68} = \ln \frac{3,68}{1,35} = \ln e = 1$

Versor $\angle\varphi$	0	$33,3^g$	$66,6^g$	$\frac{\pi}{2}$	$133,3^g$	$166,6^g$	π	$233,3^g$	$266,6^g$	$\frac{3\pi}{2}$	$333,3^g$	$366,6^g$	2π	$433,3^g$	$466,6^g$	$\frac{5\pi}{2}$	$533,3^g$	$566,6^g$	3π	$633,3^g$	$666,6^g$	$\frac{7\pi}{2}$	$733,3^g$	$766,6^g$	4π
Vektor r	10	9,25	8,50	7,80	7,20	6,65	6,10	5,60	5.15	4,75	4,40	4,00	3,68	3,40	3,12	2,85	2,63	2,43	2,23	2,05	1,90	1,73	1,60	1,47	1,35
r. Komp. x	10	8,00	4,25	0	-3,60	-5,75	-6,10	-4,80	-2,60	0	2,20	3,50	3,68	2,95	1,55	0	-1,32	-2,10	-2,23	-1,78	-0,95	0	0,80	1,28	1,35
im. Komp. jy	0	4.60	7,30	7,80	6,25	3,35	0	-2,80	-4,45	-4,75	-3,80	-2,00	0	1,70	2,70	2,85	2,30	1,20	0	-1,03	-1,65	-1,73	-1,40	-0,74	0



15. Kreis- und Hyperbelfunktionen komplexer Argumente.

Zur Ermittlung der Kreis- und Hyperbelfunktionen komplexer Argumente dienen die auf der Rückseite der Komplex-Rechenplatte vorgesehenen beiden Bilder des Sinus- und Tangensreliefs. Bei dieser zeichnerischen Darstellung ist die Gauß'sche Zahlenebene durch ein rechtwinkliges Netz (rot) so unterteilt, daß man in jedem Punkt Realteil und Imaginärteil des Arguments ablesen kann. Darüber ist ein Netz von orthogonalen Kurvenscharen gezeichnet (schwarz), welches das Ablesen des Funktionswertes nach Vektorbetrag und Versor ermöglicht.
Für die Ermittlung der Hyperbelfunktionen aus den Kreisfunktionen ist außerdem noch eine ausführliche Formelzusammenstellung neben dem Tangensrelief angeordnet.

a. Der Sinus einer komplexen Zahl.

Ist das Argument mit Real- und Imaginärteil, also in der Form $\underline{x+jy}$ gegeben, so kann man den Betrag $\underline{s}$ und den Versor $\underline{\sigma^g}$ des Funktionswertes unmittelbar aus dem Sinusrelief ablesen.

$$\sin z = \sin(x+jy) = s\ \underline{/\sigma^g} = s \cdot e^{j\sigma^g}$$

Zum Beispiel:

$$\sin(0{,}9 + j\,0{,}46) = 0{,}92\ \underline{/21^g}$$
$$\sin(-0{,}38 + j\,0{,}53) = 0{,}67\ \underline{/144^g}$$
$$\sin(-0{,}20 - j\,0{,}90) = 0{,}94\ \underline{/-118^g}$$
$$\sin(0{,}8 - j\,0{,}48) = 0{,}88\ \underline{/-26^g}$$

Für $x \gtrless \pm 2k\,\pi$ gilt: $\sin(x+jy) = \sin(x \mp 2k\,\pi + jy) = s\ \underline{/\sigma^g}$

$$\sin(6{,}08 - j\,0{,}9) = \sin(6{,}08 - 6{,}28 - j\,0{,}9)$$
$$= \sin(-0{,}2 - j\,0{,}9) = 0{,}94\ \underline{/-118^g}$$
$$\sin(-6{,}66 + j\,0{,}53) = \sin(-6{,}66 + 6{,}28 + j\,0{,}53)$$
$$= \sin(-0{,}38 + j\,0{,}53) = 0{,}67\ \underline{/144^g}$$

Für $\pm \frac{\pi}{2} \lesseqgtr \pm x \lesseqgtr \pm \pi$ gilt: $\sin(x+jy) = \sin(\pm\pi - (x+jy)) = s\ \underline{/-\sigma^g}$

$$\sin(2{,}24 + j\,0{,}46) = \sin(3{,}14 - (2{,}24 + j\,0{,}46))$$
$$= \sin(0{,}9 - j\,0{,}46) = 0{,}92\ \underline{/-21^g}$$
$$\sin(-2{,}34 - j\,0{,}48) = \sin(-3{,}14 - (-2{,}34 - j\,0{,}48))$$
$$= \sin(-0{,}8 + j\,0{,}48) = 0{,}88\ \underline{/174^g}$$

b. Sinuswert gegeben, Argument gesucht.

Ist der Sinuswert in der Form $a + jb$ gegeben, so verwandelt man ihn in die Form $r\,\underline{/\varphi^g} = s\,\underline{/\sigma^g}$ unter Benutzung der Vorderseite der Komplex-Rechenplatte. Mit s und σ liest man aus dem Sinusrelief die Werte x und y einschließlich des zugehörigen Vorzeichens ab.

Zum Beispiel:

$\text{arc sin } 0{,}92\,\underline{/-21^g} \quad = 0{,}9 - j\,0{,}46$ oder auch gemäß $\pi - (x + jy) = 2{,}24 + j\,0{,}46$ *)

$\text{arc sin } 0{,}88\,\underline{/\,174^g} \quad = -0{,}8 + j\,0{,}48$ oder auch gemäß $-\pi - (x + jy) = -2{,}34 - j\,0{,}48$ *)

c. Der Cosinus einer komplexen Zahl.

Der Cosinus wird nach folgenden Formeln in den Sinus überführt:

$$\cos\,(u + jv) = \cos\,(-u - jv) = \sin\,(\tfrac{\pi}{2} + |u| + j\,|v|)$$

$$\cos\,(-u + jv) = \cos\,(u - jv) = \sin\,(\tfrac{\pi}{2} - |u| + j\,|v|)$$

Zum Beispiel:

$\cos\,(0{,}67 + j\,0{,}46) = \sin\,(1{,}57 + 0{,}67 + j\,0{,}46) = \sin\,(2{,}24 + j\,0{,}46) = 0{,}92\,\underline{/-21^g}$

$\cos\,(1{,}83 - j\,0{,}3) = \sin\,(1{,}57 - 1{,}83 + j\,0{,}3) = \sin\,(-0{,}26 + j\,0{,}3) = 0{,}4\,\underline{/148^g}$

d. Cosinuswert gegeben, Argument gesucht.

Man verfährt wie unter b) und setzt die erhaltenen Werte x und y mit dem Vorzeichen in nachstehende Formel ein:

$$\text{arc cos } s\,\underline{/\sigma^g} = (\tfrac{\pi}{2} - x) - jy$$

Zum Beispiel:

$\text{arc cos } 0{,}4\,\underline{/148^g}$; mit $\sigma = 148^g$ und $s = 0{,}4$ erhält man aus dem Sinusrelief für $x = -0{,}26$ und für $y = 0{,}3$

$\text{arc cos } 0{,}4\,\underline{/148^g} = (1{,}57 + 0{,}26) - j\,0{,}3 = 1{,}83 - j\,0{,}3$

$\text{arc cos } 0{,}67\,\underline{/-144^g}$; $(x = -0{,}38$ und $y = -0{,}53)$

$\text{arc cos } 0{,}67\,\underline{/-144^g} = (1{,}57 + 0{,}38) + j\,0{,}53 = 1{,}95 + j\,0{,}53$

---

*) Für mehrdeutige Lösungen benutze man zusätzlich der besseren Übersicht wegen das erweiterte Sinusrelief auf Seite 23.

e. Der Hyperbelsinus einer komplexen Zahl.

Der Hyperbelsinus wird nach folgenden Formeln in den Kreissinus überführt:

$\mathfrak{Sin}\,(\ \ u+jv) = j\ \sin(|v| - j\,|u|)$; $\qquad \mathfrak{Sin}\,(-u-jv) = j\ \sin(-|v| + j\,|u|)$

$\mathfrak{Sin}\,(-u+jv) = j\ \sin(|v| + j\,|u|)$; $\qquad \mathfrak{Sin}\,(\ \ u-jv) = j\ \sin(-|v| - j\,|u|)$

Zum Beispiel:

$\mathfrak{Sin}\,(0{,}8-j\,0{,}22) = j\ \sin\,(-0{,}22-j\,0{,}8) = j\ 0{,}91\ \underline{/-121^g}$; mit j multiplizieren bedeutet eine Drehung um $+100^g$

$\mathfrak{Sin}\,(0{,}8-j\,0{,}22) = 0{,}91\ \underline{/-21^g}$

$\mathfrak{Sin}\,(0{,}35+j\,6{,}49) = j\ \sin(6{,}49-j0{,}35)$; $6{,}49-2\,\pi = 6{,}49-6{,}28 = 0{,}21$;

$= j\ \sin(0{,}21-j\,0{,}35) = j\ 0{,}42\ \underline{/-62^g} = 0{,}42\ \underline{/38^g}$

f. Hyperbelsinus gegeben, Argument gesucht.

Je nachdem ob φ^g im 1., 2., 3. oder 4. Quadranten liegt, setzt man es gleich $(100-\sigma)^g$, $(100+\sigma)^g$, $(-100-\sigma)^g$ oder $(-100+\sigma)^g$, liest x und y aus dem Sinusrelief ab und ermittelt das Argument nach folgenden Formeln:

$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\ s\ \underline{/(100-\sigma)^g} = \ \ y+jx$; $\qquad \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\ s\ \underline{/(-100-\sigma)^g} = -y-jx$

$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\ s\ \underline{/(100+\sigma)^g} = -y+jx$; $\qquad \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\ s\ \underline{/(-100+\sigma)^g} = \ \ y-jx$

Zum Beispiel:

$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\ 0{,}91\ \underline{/-21^g}$; $\ s\ \underline{/(-100+\sigma)^g} = 0{,}91\ \underline{/79^g}$; $x=0{,}22,\ y=0{,}8$

$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\ 0{,}91\ \underline{/-21^g} = 0{,}8 - j\ 0{,}22$

$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\ 0{,}42\ \underline{/38^g}$; $\ s\ \underline{/(100-\sigma)^g} = 0{,}42\ \underline{/62^g}$; $x=0{,}22,\ y=0{,}35$

$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\ 0{,}42\ \underline{/38^g} = 0{,}35 + j\ 0{,}22$

g. Der Hyperbelcosinus einer komplexen Zahl.

Der Hyperbelcosinus wird nach folgenden Formeln in den Kreissinus überführt:

$$\mathfrak{Cos}\,(\ \ u+jv) = \mathfrak{Cos}\,(-u-jv) = \sin\,\left(\frac{\pi}{2} + |v| - j\,|u|\right)$$

$$\mathfrak{Cos}\,(-u+jv) = \mathfrak{Cos}\,(\ \ u-jv) = \sin\,\left(\frac{\pi}{2} - |v| - j\,|u|\right)$$

Zum Beispiel:

$\mathfrak{Cos}\,(-0{,}42+j\,0{,}45) = \sin\,(1{,}57-0{,}45-j\,0{,}42) = \sin(1{,}12 - j\ 0{,}42) = 1{,}0\ \underline{/-12^g}$

$\mathfrak{Cos}\,(-0{,}46-j\,0{,}67) = \sin\,(1{,}57+0{,}67-j\,0{,}46) = \sin(2{,}24 - j\ 0{,}46) = \sin(\pi-(x+jy)) = \sin(0{,}9 + j\ 0{,}46) = 0{,}92\ \underline{/21^g}$

h. Hyperbelcosinus gegeben, Argument gesucht.

Man verfährt wie unter b) und setzt die erhaltenen Werte x und y mit dem Vorzeichen in nachstehende Formel ein:

$$s \,/\underline{\sigma^g} = y + j\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Zum Beispiel:

$1{,}0\ \underline{/-12^g}$; 4. Quadrant; $x = 1{,}12,\ y = -0{,}42$

$1{,}0\ \underline{/-12^g} = -0{,}42 + j(1{,}57 - 1{,}12) = -0{,}42 + j\,0{,}45$

oder auch $x=2{,}02$; $y=0{,}42$ mit $\pi-(x+jy)$ und damit:

$1{,}0\ \underline{/-12^g} = 0{,}42 + j(1{,}57 - 2{,}02) = 0{,}42 - j\,0{,}45$

$0{,}92\ \underline{/21^g}$; 1. Quadrant; $x=0{,}9$; $y=0{,}46$ bzw. $x= 2{,}24$; $y=-0{,}46$

$0{,}92\ \underline{/21^g} = 0{,}46 + j\,0{,}67$ bzw. $= -0{,}46 - j\,0{,}67$

i. Der Tangens einer komplexen Zahl.

Ist das Argument mit Real- und Imaginärteil, also in der Form $\underline{x+jy}$ gegeben, so kann man den Vektorbetrag $\underline{t}$ und den Versor $\underline{\tau}^g$ des Funktionswertes unmittelbar aus dem Tangensrelief ablesen.

$$\mathrm{tg}\ z = \mathrm{tg}\ (x+jy) = t\,/\underline{\tau^g} = t \cdot e^{j\tau^g}$$

Zum Beispiel:

$$\mathrm{tg}\ (0{,}36 + j\,0{,}6) = 0{,}64\ \underline{/74^g}$$

$$\mathrm{tg}\ (-0{,}44 - j\,0{,}38) = 0{,}58\ \underline{/-147^g}$$

Für $x \lesseqgtr \pm k\,\pi$ gilt: $\mathrm{tg}(x+jy) = \mathrm{tg}\ (x \mp k\,\pi + jy) = t\,\underline{/\tau^g}$

$$\mathrm{tg}\ (-9{,}69 - j\,0{,}34) = (-x + k\,\pi - jy) = (-9{,}69 + 3\,\pi - j\,0{,}34) = (-0{,}26 - j\,0{,}34) = 0{,}42\ \underline{/-138^g}$$

Für $\pm\frac{\pi}{4} \lesseqgtr \pm x \lesseqgtr \pm\frac{\pi}{2}$ gilt: $\mathrm{tg}(x+jy) = 1 : \mathrm{tg}(\pm\frac{\pi}{2} - (x+jy)) = 1 : (t\,\underline{/-\tau^g}) = \frac{1}{t}\,\underline{/\tau^g}$

$$\mathrm{tg}\ (1{,}22 - j\,0{,}86) = 1 : \mathrm{tg}(1{,}57 - 1{,}22 + j\,0{,}86) = 1 : \mathrm{tg}(0{,}35 + j\,0{,}86) = 1 : (0{,}76\ \underline{/85^g}) = 1{,}32\ \underline{/-85^g}$$

j. Tangenswert gegeben, Argument gesucht.

Ist der Tangenswert in der Form $a+jb$ gegeben, so verwandelt man ihn in die Form $r\,\underline{/\varphi^g} = t\,\underline{/\tau^g}$. Mit t und τ liest man aus dem Tangensrelief die Werte x und y einschließlich des zugehörigen Vorzeichens ab.

Zum Beispiel:

$$\text{arc tg } 0{,}58\ \underline{/{-147^g}} = -0{,}44 - j\,0{,}38 \text{ und auch } = -\frac{\pi}{2} - \text{arc tg } 1{,}72\ \underline{/147^g} = -1{,}13 - j0{,}38 \quad ^{*)}$$

$$\text{arc tg } 1{,}32\ \underline{/{-85^g}} = \frac{\pi}{2} - \text{arc tg } 0{,}76\underline{/85^g} = 1{,}22 - j0{,}86 \text{ und auch } = 0{,}35 - j\,0{,}86 \quad ^{*)}$$

k. Der Cotangens einer komplexen Zahl.

Der Cotangens wird nach folgender Formel in den Tangens überführt:

$$\text{ctg}\,(u+jv) = 1 : \text{tg}(u+jv) = \frac{1}{t}\ \underline{/{-\tau^g}}$$

Zum Beispiel:

$$\text{ctg}\,(0{,}5 + j0{,}67) = 1 : \text{tg}(0{,}5+j0{,}67) = 1 : (0{,}76\underline{/72^g}) = 1{,}32\ \underline{/{-72^g}}$$

$$\text{ctg}\,(-0{,}38-j0{,}74) = 1 : \text{tg}(-0{,}38-j0{,}74) = 1 : (0{,}72\ \underline{/{-120^g}}) = 1{,}39\ \underline{/120^g}$$

l. Cotangenswert gegeben, Argument gesucht.

Man benutzt die Beziehung: $\text{arc ctg}\, t\underline{/\tau^g} = \text{arc tg } \frac{1}{t}\ \underline{/{-\tau^g}}$

Zum Beispiel:

$$\text{arc ctg } 2{,}08\ \underline{/{-144^g}} = \text{arc tg } \frac{1}{2{,}08}\ \underline{/144^g} = \text{arc tg } 0{,}48\ \underline{/144^g} = -0{,}34 + j\,0{,}35$$

$$\text{arc ctg } 0{,}76\ \underline{/85^g} = \text{arc tg } 1{,}32\ \underline{/{-85^g}} = 1{,}22 - j\,0{,}86$$

m. Der Hyperbeltangens einer komplexen Zahl.

Der Hyperbeltangens wird nach folgenden Formeln in den Kreistangens überführt:

$$\mathfrak{Tg}\,(\,u+jv\,) = j\ \text{tg}(|\,v\,| - j\,|\,u\,|); \qquad \mathfrak{Tg}\,(-u-jv) = j\ \text{tg}(-\,|\,v\,| + j\,|\,u\,|)$$

$$\mathfrak{Tg}\,(-u+jv) = j\ \text{tg}(|\,v\,| + j\,|\,u\,|); \qquad \mathfrak{Tg}\,(\,u-jv\,) = j\ \text{tg}(-\,|\,v\,| - j\,|\,u\,|)$$

Zum Beispiel:

$\mathfrak{Tg}\,(-0{,}64+j0{,}22) = j\ \text{tg}(+0{,}22 + j\,0{,}64) = j\,0{,}60\ \underline{/84^g}$ mit j multiplizieren bedeutet eine Drehung um $+100^g$

$$\mathfrak{Tg}\,(-0{,}64+j0{,}22) = 0{,}6\ \underline{/184^g}$$

$$\mathfrak{Tg}\,(-0{,}54-j0{,}44) = j\ \text{tg}\ (-0{,}44 + j\,0{,}54) = j\,0{,}66\ \underline{/134^g} = 0{,}66\ \underline{/{-166^g}}$$

---

*) Für mehrdeutige Lösungen benutzt man zusätzlich der besseren Übersicht wegen das erweiterte Tangensrelief auf Seite 22

n. Hyperbeltangens gegeben, Argument gesucht.

Je nachdem ob φ^g im 1., 2., 3. oder 4. Quadranten liegt, setzt man es gleich $(100-\tau)^g$, $(100+\tau)^g$, $(-100-\tau)^g$ oder $(-100+\tau)^g$, liest x und y aus dem Tangensrelief ab und ermittelt das Argument nach folgenden Formeln:

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\ t\ \underline{/(100-\tau)^g} = y+jx; \qquad \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\ t\ \underline{/(-100-\tau)^g} = -y-jx$$

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\ t\ \underline{/(100+\tau)^g} = -y+jx; \qquad \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\ t\ \underline{/(-100+\tau)^g} = y-jx$$

Zum Beispiel:

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\ 0{,}6\ \underline{/184^g};\ s\ \underline{/(100+\tau)^g} = 0{,}6\ \underline{/84^g};\ x = 0{,}22;\ y = 0{,}64$$

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\ 0{,}6\ \underline{/184^g} = -0{,}64 + j0{,}22$$

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\ 0{,}66\ \underline{/-166^g};\ s\ \underline{/(-100-\tau)^g} = 0{,}66\ \underline{/-66^g};\ x=0{,}44;\ y=0{,}54$$

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\ 0{,}66\ \underline{/-166^g} = -0{,}54 - j0{,}44$$

o. Der Hyperbelcotangens einer komplexen Zahl.

Der Hyperbelcotangens wird nach folgender Formel in den Hyperbeltangens überführt:

$$\mathfrak{Ctg}\ \underline{(u+jv)} = 1 : \mathfrak{Tg}\ (u+jv) = \frac{1}{jt}\ \underline{/-\tau^g}$$

Zum Beispiel:

$$\mathfrak{Ctg}\ (0{,}76-j0{,}18) = 1 : \mathfrak{Tg}\ (0{,}76-j0{,}18) = 1 : j\mathrm{tg}(-0{,}18-j0{,}76) = 1 : (j0{,}66\ \underline{/-110^g}) = (1{,}52\ \underline{/110^g}) : j$$

Durch j dividieren ist gleichbedeutend mit einer Drehung um -100^g

$$\mathfrak{Ctg}\ (0{,}76-j0{,}18) = 1{,}52\ \underline{/10^g}$$

$$\mathfrak{Ctg}\ (-0{,}18-j0{,}76) = 1 : \mathfrak{Tg}\ (-0{,}18-j0{,}76) = 1 : j\mathrm{tg}(-0{,}76+j0{,}18)$$

$$= 1 : (j0{,}94\underline{/178^g}) = (1{,}06\underline{/-178^g}) : j$$

$$\mathfrak{Ctg}\ (-0{,}18-j0{,}76) = 1{,}06\ \underline{/122^g}$$

p. Hyperbelcotangens gegeben, Argument gesucht.

Man benutzt die Beziehung:

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\,t\,\underline{/\tau^g} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{1}{t}\,\underline{/-\tau^g}$$

Zum Beispiel:

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\,1{,}52\;\underline{/10^g} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,0{,}66\;\underline{/-10^g};\ t\,\underline{/(-100+90)^g};\ x=0{,}18;\ y = 0{,}76$$
$$= 0{,}76 - j\,0{,}18$$

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\,1{,}06\;\underline{/122^g} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,0{,}94\;\underline{/-122^g};\ t\,\underline{/(-100-22)^g};\ x = 0{,}76;\ y = 0{,}18$$
$$= -0{,}18 - j\,0{,}76$$

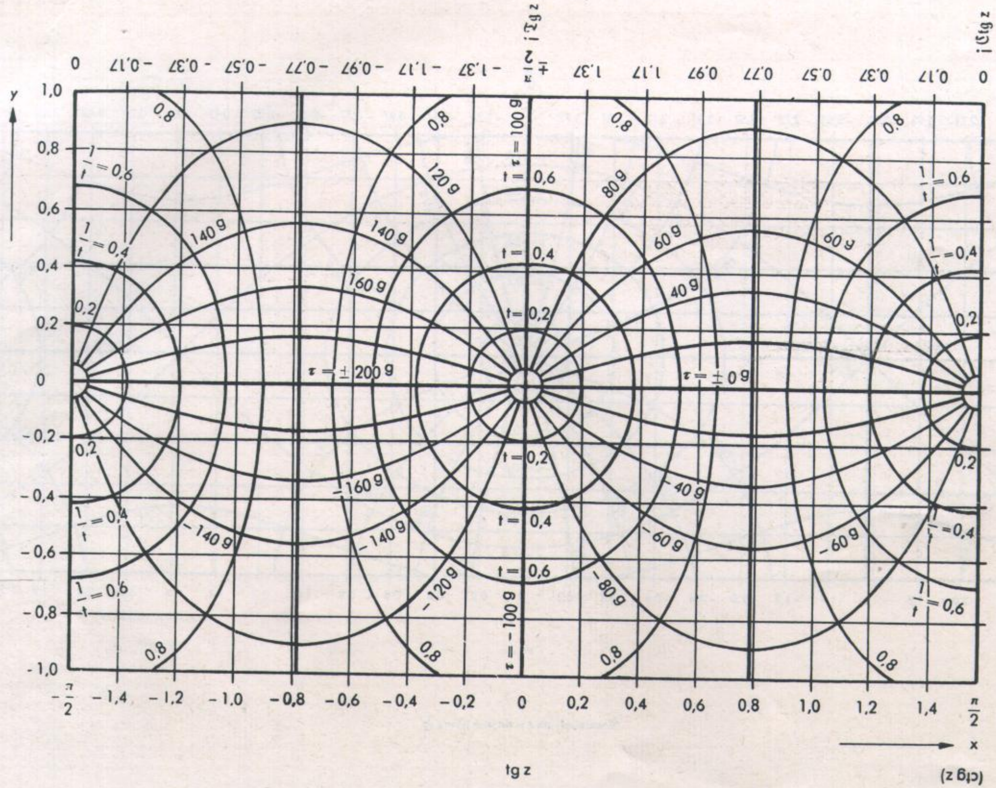
Anmerkung:

Um Irrtümer zu vermeiden und um bei mehrdeutigen Lösungen einen Überblick über die möglichen Lösungen zu erreichen, ist auf den folgenden Seiten 22 und 23 je ein erweitertes Relief der Sinus- bzw. Tangensfunktion aufgezeichnet.

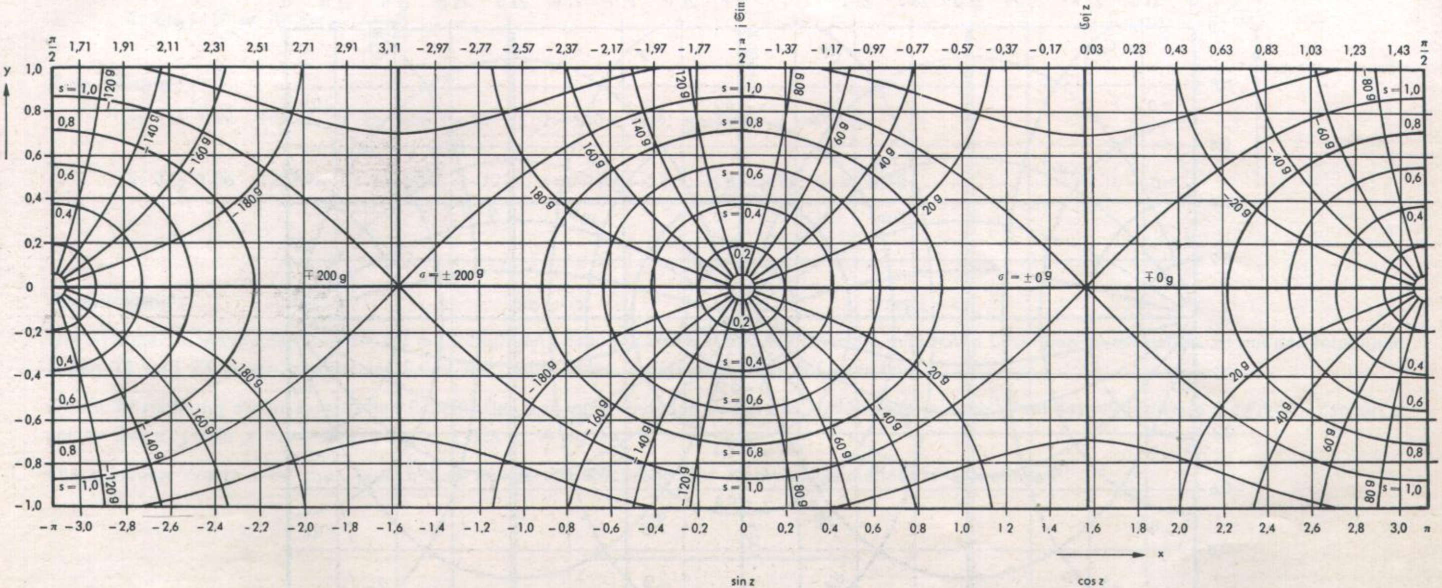
Durch Betrachtung dieser erweiterten Reliefkarten von verschiedenen Seiten aus, erhält man je nach Wahl des Nullpunktes die Funktionen sin z, cos z, $\mathfrak{Cos}\,z$, j $\mathfrak{Sin}\,z$ bzw. tg z, j $\mathfrak{Tg}\,z$, j $\mathfrak{Ctg}\,z$, +ctg z

Die genauen Werte wird man jedoch den Reliefs der Rückseite der Komplex-Rechenplatte entnehmen.

Zum eventuellen Einzeichnen oder Auftragen von Einzelwerten oder Kurven in die Komplex-Rechenplatte empfehlen wir die Verwendung unseres Spezialschreibstiftes Nr. 2241 CRISTALLOGRAPH, der in 5 Farben durch den Fachhandel erhältlich ist.



Tangensrelief: $\operatorname{tg} z = \operatorname{tg}(x + jy) = t\,\underline{/\tau}$



Sinusrelief: $\sin z = \sin(x + jy) = s\,\underline{/\sigma}$

FABER-CASTELL

Wer mit FABER-CASTELL arbeitet
bleibt dabei

1/789 d